# МАТЕМАТИКА 3 (для Р1 и Р4)

## Памятка по ключевым вопросам теории для подготовки к экзамену

### 1. Первообразная

**Определение**. Функция $F(x)$, дифференцируемая на некотором промежутке $X$ числовой оси, называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на этом промежутке, если $\forall x \in X : F'(x) = f(x)$.

### 2. Неопределенный интеграл

**Определение**. Множество всех первообразных для функции $f(x)$ на некотором промежутке $X$ называется ***неопределённым интегралом*** от этой функции на этом промежутке и обозначается:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $\int$ - знак интеграла;

$x$ – переменная интегрирования;

$f(x)$ – подынтегральная функция;

$dx$ – дифференциал переменной интегрирования;

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение;

$F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$;

$C$ – произвольная постоянная.

**Свойство 1**. Для любого ненулевого числа $c$ справедливо равенство

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx.$$

**Свойство 2**. Для любых функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ справедливо равенство

$$\int \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$

### 3. Таблица неопределенных интегралов

В таблице неопределённых интегралов $u$ обозначает как независимую переменную, так и любую дифференцируемую функцию $u = u(x)$. Все формулы таблицы интегралов проверяются дифференцированием правой части формулы – результатом при этом является подынтегральная функция.

1. $\int u^\alpha du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,$ при $\alpha \neq -1.$

2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C.$

3. $\int e^u du = e^u + C.$

4. $\int \sin u du = -\cos u + C.$

5. $\int \cos u du = \sin u + C.$

6. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$

7. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$

8. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \left[\begin{array}{l} \arcsin \dfrac{u}{a} + C, \\ -\arccos \dfrac{u}{a} + C. \end{array}\right.$

9. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{u}{a} + C, \\ -\dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{u}{a} + C. \end{array}\right.$

10. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$

11. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C.$

12. $\int \operatorname{tg} u \, du = -\ln|\cos u| + C.$

13. $\int \operatorname{ctg} u \, du = \ln|\sin u| + C.$

14. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C.$

### 4. Формула интегрирования по частям

Пусть даны две функции $u = u(x), v = v(x)$, имеющие непрерывные производные. Тогда справедлива формула ***интегрирования по частям***:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Если рассматривается определённый интеграл по промежутку $[a; b]$, то формула интегрирования по частям принимает вид:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu,$$

при условии, что определённые интегралы справа и слева существуют.

### 5. Определенный интеграл и его геометрический смысл

**Определение 1.** Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке $[a; b]$. Выполним следующие операции:

1. Разобьём промежуток $[a;b]$ на $n$ промежутков точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

2. Найдём длины этих промежутков:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

3. На каждом промежутке возьмём по одной точке, обозначим их $m_1, m_2, \dots, m_k$.

4. В этих точках вычислим значения функции: $f(m_1), f(m_2), \dots, f(m_n)$.

Составим сумму $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(m_k)\Delta x_k$. Эта сумма называется ***интегральной суммой*** или *суммой Римана* для функции $f(x)$ на промежутке $[a;b]$. Сумма Римана зависит как от способа разбиения промежутка $[a;b]$ на промежутки, так и от выбора точек в каждом промежутке.

5. Назовём ***рангом дробления*** наибольшую из длин $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, обозначим его $\lambda$.

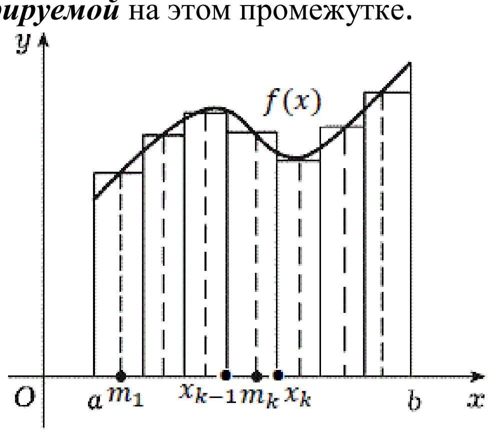
6. Устремим $\lambda$ к $0$, при этом количество промежутков $n$ стремится к бесконечности.

7. Если существует конечный предел суммы Римана при $\lambda \to 0$ $(n \to \infty)$, не зависящий ни от способа разбиения промежутка $[a;b]$ на промежутки, ни от выбора точек в каждом промежутке, то он называется ***определенным интегралом*** от функции $f(x)$ по промежутку $[a;b]$ и обозначается:

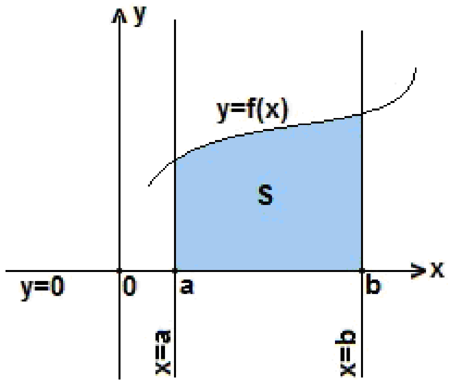
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0(n\to\infty)} S_n$$

$$= \lim_{\lambda\to 0(n\to\infty)} \sum_{k=1}^{n} f(m_k)\Delta x_k.$$

Промежуток $[a;b]$ называется ***промежутком интегрирования***, а его концы $a$ и $b$ – нижним и верхним ***пределами интегрирования***. Функция $f(x)$, для которой существует на промежутке $[a;b]$ определённый интеграл, называется ***интегрируемой*** на этом промежутке.




**Определение 2.** Пусть на промежутке $[a;b]$ задана неотрицательная непрерывная функция $f(x)$. ***Криволинейной трапецией*** называется фигура, ограниченная сверху графиком функции $f(x)$, снизу промежутком $[a;b]$ оси абсцисс, справа и слева отрезками вертикальных прямых $x = a, x = b$.




**Теорема (геометрический смысл определенного интеграла).**

Если неотрицательная функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b]$, то площадь криволинейной трапеции равна определенному интегралу от этой функции по этому промежутку:

$$S_{\text{крив.трапеции}} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

**6. Формула Ньютона-Лейбница**

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b]$, тогда справедлива формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – любая первообразная для функции $f(x)$ на промежутке $[a;b]$.

**7. Определение функции двух переменных.**

***Функцией двух вещественных переменных*** $x$ и $y$ называется правило, по которому каждой паре чисел $(x, y)$ ставится в соответствие единственное вещественное число $z$. Это правило (соответствие) обозначают: $z = f(x, y)$.

**8. Определение частных производных функции двух переменных.**

***Частной производной*** функции $z = f(x, y)$ ***по*** $x$ называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ функции по $x$ к приращению аргумента $\Delta x$, когда $\Delta x$ стремится к нулю, т.е.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

***Частной производной*** функции $z = f(x, y)$ ***по*** $y$ называется предел отношения частного приращения $\Delta_y z$ функции по $y$ к приращению аргумента $\Delta y$, когда $\Delta y$ стремится к нулю, т.е.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}.$$

**9. Определение точек минимума и максимума функции двух переменных.**

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется ***точкой максимума*** функции $f(x,y)$, если найдется такая окрестность точки $M_0$, что для любых точек $M(x,y)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x,y) < f(x_0,y_0)$.

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется ***точкой минимума*** функции $f(x,y)$, если найдется такая окрестность точки $M_0$, что для любых точек $M(x,y)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x,y) > f(x_0,y_0)$.

**10. Необходимые и достаточные условия экстремума функции двух переменных.**

**Необх. усл.** Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$ и имеет в этой точке экстремум (максимум или минимум), то

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \end{cases}.$$

Точка, в которой все частные производные функции равны нулю, называется **стационарной точкой** функции.

**Дост. усл.** Если $M_0(x_0,y_0)$ - **стационарная точка** дважды дифференцируемой функции $f(x,y)$ и если $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)$, то функция имеет экстремум, если $AC - B^2 > 0$ и не имеет экстремума, если $AC - B^2 < 0$. При этом экстремум - максимум, если $A < 0$ и минимум, если $A > 0$.

**11. Задача Коши для дифференциального уравнения.**

Задача Коши с начальными данными $x_0, y_0, y_1, \dots y_{n-1}$ для дифференциального уравнения $F(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0$ состоит в нахождении такого решения $\varphi(x)$ дифференциального уравнения, которое удовлетворяет равенствам:

$$\varphi(x_0) = y_0,\ \varphi'(x_0) = y_1, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

**12. Определение общего решения дифференциального уравнения.**

Общим решением дифференциального уравнения $n$-го порядка называется функция $\varphi(x, C_1, \dots, C_n)$, удовлетворяющая двум условиям:

1) При любом наборе значений постоянных $C_1, \dots, C_n$ функция $\varphi(x, C_1, \dots, C_n)$ является решением дифференциального уравнения.

2) При любом наборе начальных данных $x_0, y_0, y_1, \dots y_{n-1}$ задачи Коши (взятом из области существования и единственности задачи Коши) можно подобрать такие значения постоянных, что при их подстановке в $\varphi(x, C_1, \dots, C_n)$ получится решение задачи Коши с этими начальными данными.

**13. Определение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.**

Дифференциальным уравнением с ***разделяющимися переменными*** называется уравнение, которое можно преобразовать к виду

$$f(x)dx = g(y)dy.$$

**14. Определение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.**

***Линейным однородным дифференциальным уравнением*** ***$n$-ого порядка*** ( ЛОДУ($n$) ) называется уравнение вида

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0,$$

где $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ - функции, непрерывные на промежутке $[a,b]$; и $\forall x \in [a,b]: a_0(x) \neq 0$.

**15. Определение линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка.**

***Линейным неоднородным дифференциальным уравнением*** ***$n$-ого порядка*** ( ЛНДУ($n$) ) называется уравнение вида

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x),$$

где $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ и $f(x)$ - непрерывные функции на промежутке $[a,b]$; причем $a_0(x) \neq 0$ для любого $x \in [a,b]$ и $f(x)$ тождественно не равно нулю на $[a,b]$.

**16. Структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.**

Пусть $y_1, \dots y_n$ фундаментальная система решений ЛОДУ($n$). Тогда общее решение ЛОДУ($n$) имеет вид:

$$y_{общодн} = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$$

**17. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка.**

Общее решение ЛНДУ($n$) является суммой общего решения $y_{общодн}$ ЛОДУ($n$) и частного решения $y_*$ ЛНДУ($n$):

$$y_{общнеодн} = y_{общодн} + y_*.$$